Universidad Simón Bolívar
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas

Nombre: ______________________________

Carné: _______________ Sección: _____

MA-2112 Abril-Julio 2011

1^{er} Examen Parcial (50 %) **Tipo C**

Justifique todas sus respuestas.

1. Sea $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ dada por $f(x,y)=(x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}},\cos(xy))$:

a) Halle (si existe) la derivada de f en $(0,0)$.

Se tiene $f=(f_1,f_2)$ con $f_1(x,y)=x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}$ y $f_2(x,y)=\cos(xy)$. Ahora:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}(0,0)=\lim_{t\to 0}\frac{f_1(t,0)-f(0,0)}{t}=0 \qquad \frac{\partial f_1}{\partial y}(0,0)=\lim_{t\to 0}\frac{f_1(0,t)-f(0,0)}{t}=0$$

y

$$\frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y)=-y\,\mathrm{sen}(xy) \qquad \frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y)=-x\,\mathrm{sen}(xy)$$

Luego,

$$Df(0,0)=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

b) Diga, justificando, si se cumple la regla de la cadena para $f\circ g$ en $t=0$, donde $g(t)=(t,t)$.

Observamos que $(f\circ g)(t)=(t^{\frac{1}{3}}t^{\frac{2}{3}},\cos(t.t))=(t,\cos(t^2))$, de donde:

$$D(f\circ g)(0)=(f\circ g)'(0)=(1,0)$$

pero:

$$Df(g(0))Dg(0)=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}Dg(0)=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

Así $D(f\circ g)(0)\neq Df(g(0))Dg(0)$, y por lo tanto no se cumple la regla de la cadena.

c) Diga, justificando, si f es diferenciable en $(0,0)$.

No es diferenciable en $(0,0)$ pues por (b) no se cumple la regla de la cadena para $f\circ g$, y g claramente es diferenciable.

(13 puntos)

2. Halle los puntos de la superficie $z^2 = 2x^2 + 3y^2$ en los cuales el plano tangente es paralelo al plano de ecuación $2x + 3y + 4z = 5$.

La superficie es $N_0(F)$, el conjunto de nivel cero para la función $F(x, y, z) = 2x^2 + 3y^2 - z^2$. Sabemos que el gradiente es ortogonal a los conjuntos de nivel, así $\nabla F(x, y, z) = (4x, 6y, -2z)$ sera normal al plano tangente en el punto (x, y, z), y como queremos que sea paralelo a $(2, 3, 4)$, el vector normal al plano $2x + 3y + 4z = 5$, hacemos $\nabla F(x, y, z) = \lambda(2, 3, 4)$, es decir:

$$\begin{array}{rcl} 4x &=& 2\lambda \;\Rightarrow\; x = \frac{\lambda}{2} \\ 6y &=& 3\lambda \;\Rightarrow\; y = \frac{\lambda}{2} \\ -2z &=& 4\lambda \;\Rightarrow\; z = -2\lambda \end{array}$$

Usando la ecuación de la superficie: $z^2 = 2x^2 + 3y^2$ queda:

$$\frac{\lambda^2}{2} + \frac{3\lambda^2}{4} - 4\lambda^2 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \lambda^2 = 0$$

de donde el punto es $x = y = z = 0$, pero en este punto no existe el plano tangente pues la superficie es un cono, que en el vértice no es diferenciable. Por lo tanto, no existen puntos donde el plano tangente a $z^2 = 2x^2 + 3y^2$ sea paralelo al plano $2x + 3y + 4z = 5$.

(12 puntos)

3. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciable. Supongamos que $f(0, 0) = 0$ y $\operatorname{sen}(f(x, y)) + xe^{f(x,y)} = 0$. Halle el plano tangente a la superficie $z = f(x, y)$ en $(0, 0, 0)$.

La ecuación del plano tangente a la superficie $z = f(x, y)$ en $(0, 0, 0)$ esta dada por

$$z = \frac{\partial z}{\partial x}(0, 0)x + \frac{\partial z}{\partial y}(0, 0)y$$

.
Tomando $F(x, y, z) = \operatorname{sen}(z) + xe^z$, vemos que

$$F(0, 0, 0) = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial z}(0, 0, 0) \neq 0$$

Usando el teorema de la función implicita se tiene:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{-\frac{\partial F}{\partial x}(0, 0, 0)}{\frac{\partial F}{\partial z}(0, 0, 0)} = \frac{-e^z}{\cos(z) + xe^z}|_{(0,0,0)} = -1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \frac{-\frac{\partial F}{\partial y}(0, 0, 0)}{\frac{\partial F}{\partial z}(0, 0, 0)} = \frac{0}{\cos(z) + xe^z}|_{(0,0,0)} = 0$$

Así, la ecuación del plano tangente a $z = f(x, y)$ en $(0, 0, 0)$ es:

$$z = -x \qquad \text{o} \qquad x + z = 0$$

(12 puntos)

4. Halle el máximo y el mínimo absoluto de la función $f(x,y,z) = x + y^2 + z^2$ en el conjunto $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + 3y^2 + 5z^2 \leq 1\}$.

Sea $D = A \cup S$, donde $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + 3y^2 + 5z^2 < 1\}$ y $S = N_1(g)$, el conjunto de nivel 1 para $g(x,y,z) = x^2 + 3y^2 + 5z^2$. El gradiente de f es $\nabla f(x,y,z) = (1, 2y, 2z)$, y por tanto f no tiene puntos críticos en A. Restringimos nuestro estudio a S. Este conjunto es cerrado y acotado (por ser un elipsoide), y como f es una funcíon continua (por ser un polinomio), el teorema de existencia de máximos y mínimos, garantiza que f alcanza valores extremos en S. Por otro lado, el metodo de multiplicadores de Lagrange nos dice que si f alcanza un valor extremo en S, existe un λ tal que $\nabla f = \lambda \nabla g$, esto es:

$$(1, 2y, 2x) = \lambda(2x, 6y, 10z)$$

De donde

$$\begin{array}{rcll} 1 & = & 2\lambda x & \\ 2y & = & 6\lambda y & \Rightarrow \quad 2y(1-3\lambda) = 0 \quad (*) \\ 2z & = & 10\lambda z & \Rightarrow \quad 2z(1-5\lambda) = 0 \quad (**) \end{array}$$

Las ecuaciones $(*)$ y $(**)$ nos dicen que $y = 0 = z$. Por ejemplo, si $y \neq 0$ entonces $\lambda = \frac{1}{3}$, de donde $x = \frac{3}{2}$ y $z = 0$. Pero como $x^2 + 3y^2 + 5z^2 = 1$, nos queda $3y^2 = 1 - (\frac{3}{2})^2$ que no es posible. De igual forma se prueba que $z = 0$. Nos queda entonces que $x^2 = 1$, así los puntos son $(1,0,0)$ y $(-1,0,0)$. Como $f(1,0,0) = 1$ y $f(-1,0,0) = -1$, la función alcanza un máximo absoluto en $(1,0,0)$ y un mínimo absoluto en $(-1,0,0)$.

(13 puntos)